

# Curso de electromagnetismo -Capítulo 3-Eletrostática em meios dielétricos

Rubens Amaral

*Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense*

*Av. Litorânea, S/N, Boa Viagem, Niterói, CEP.24210-340, Rio de Janeiro - Brasil*

3 de maio de 2014

# Capítulo 1

## Eletrostática em meios dielétricos

### 1.1 Mecanismos de polarização

Em meios dielétricos se observa a formação de dipolos induzidos por um campo elétrico aplicado. Esta formação se deve à ação do campo elétrico em cada átomo ou molécula que forma o dielétrico. Dois mecanismos básicos estão presentes conforme a molécula seja apolar ou polar.

Caso a molécula seja apolar, na ausência de campos, é comum se observar a indução de um dipolo atômico efetivo que cresce linearmente com o campo aplicado:

$$\vec{P}_{atm} = \alpha \vec{E}. \quad (1.1.1)$$

Este comportamento caracteriza um dielétrico linear e isotrópico. Podemos ter linearidade sem isotropia se

$$P_{atmi} = \alpha_{ij} E_j \quad (1.1.2)$$

onde  $\alpha_{ij}$  é o tensor de polarização.

*Exemplo: Modelo para a polarização linear. Supomos uma densidade eletrônica rígida e uniforme em equilíbrio com o núcleo. A presença do campo aplicado desloca a condição de equilíbrio, estabelecendo uma separação entre o centro de cargas eletrônico e o núcleo. Supomos o raio atômico como sendo  $a$  e a distância, entre o núcleo e o centor das cargas eletrônicas, no equilíbrio como sendo  $d$ . O campo elétrico da núvem eletrônica no núcleo será*

$$\vec{E}(d) = \frac{Q(d)}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{d^3 q(a)}{a^3 4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 a^3}. \quad (1.1.3)$$

*Para que haja equilíbrio o campo aplicado no núcleo pela núvem eletrônica deve cancelar o campo aplicado. O momento de dipolo do átomo será (porquê?)*

$$\vec{P} = qd\hat{E} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E} = \alpha \vec{E} \quad (1.1.4)$$

*Este valor,  $\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3$ , apresenta um acordo com a experiência apenas em termos de ordem de grandeza. Não se deveria esperar mais de um modelo tão ingênuo, n/ao e verdade?*

*Problema: O exemplo acima pode ser melhorado se supomos que a densidade de cargas é rígida mas não uniforme. Por exemplo podemos supor uma dependência com o raio e que  $\rho(r=0) \neq 0$ .*

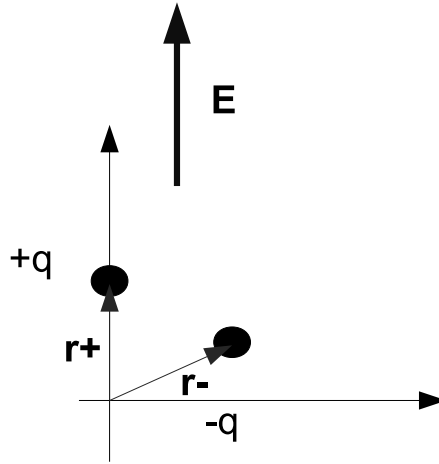


Figura 1.1: Dipolo1.

*Para este caso, encontre uma expressão , implícita, do afastamento  $d$  em termos da densidade de cargas eletrônica. Realizando uma expansão de Taylor na origem para a densidade de cargas até primeira ordem, obtenha a expressão explícita da dependência do momento de dipolo com o campo elétrico. Tomando o limite em que  $d$  pode ser considerado muito pequeno reobtenha a linearidade conforme o modelo anterior.*

Caso a molécula seja polar, isto é apresente um momento de dipolo intrínseco, o efeito do campo elétrico é favorecer configurações em que os momentos de dipolo tendem a se alinhar com o campo elétrico.

Para entender o mecanismo de alinhamento das moléculas vamos considerar um dipolo físico, não pontual, na presença de um campo elétrico externo aplicado. Fig 1.1.

O torque será

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- \approx \Delta \vec{r} \times \vec{F} = \vec{P} \times \vec{F},$$

onde  $\vec{F}$  representa a força em um ponto intermediário entre as cargas opostas. O torque é nulo quando o dipolo aponta na mesma direção e sentido do campo elétrico e restaurador para orientações diversas.

Também é interessante calcular a força sobre um dipolo devido a um campo elétrico não uniforme. Vamos usar a notação em componentes

$$F_i = \sum_{\alpha} q_{\alpha} E_i(\vec{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} (E_i(\vec{r}_0) + \Delta r_{j\alpha} \partial_j E_i(\vec{r}_0)) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} r_{j\alpha} \partial_j E_i(\vec{r}_0) = P_j \partial_j E_i(\vec{r}_0),$$

onde usamos que a carga total é nula e  $\Delta r_{j\alpha}$  é a coordenada  $j$  do vetor que liga o ponto  $\vec{r}_0$  às partículas. O ponto  $\vec{r}_0$  é melhor ser considerado no centro da cargas. Quando o dipolo físico se aproxima de um dipolo pontual a expressão final da força se torna uma igualdade e não uma aproximação.

Da mesma maneira se obtém a expressão da energia

$$U = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \Phi(\vec{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \Phi(\vec{r}_0 + \Delta \vec{r}_{\alpha}) \approx \sum_{\alpha} q_{\alpha} \Delta \vec{r}_{j\alpha} \partial_j \Phi(\vec{r}_0) = -\vec{P} \cdot \vec{E}$$

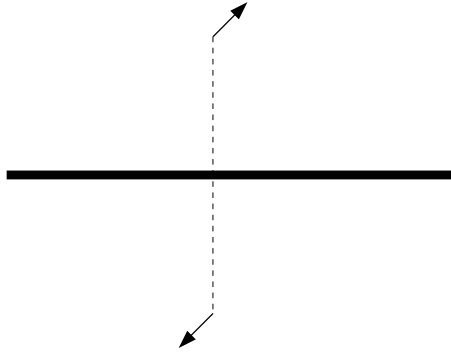


Figura 1.2: Dipolo imagem.

Esta expressão permite entender o processo de alinhamento dos dipolos do ponto de vista termodinâmico, ou melhor, mecânico estatístico. Em um banho térmico a energia trocada é da ordem do produto da constante de Boltzman pela temperatura absoluta. Há uma tendência alinhamento ditado pelo fator estatístico  $e^{-\frac{E_n}{kT}} = e^{\frac{\vec{P} \cdot \vec{E}}{kT}}$ . Quanto maior a temperatura mais desalinhados os dipolos estarão, apesar do campo elétrico aplicado.

**Exemplo** *Um dipolo pontual está a uma distância  $d$  de uma placa condutora aterrada. Qual o torque sobre o dipolo? Qual a orientação de equilíbrio? fig. 1.2*

*Pode-se resolver usando o método das imagens. Imagine uma carga imagem para cada uma das cargas que compõem o dipolo pontual a partir de um dipolo físico. Como as cargas imagens são opostas resulta, no limite de dipolo pontual, um dipolo virtual com sentido oposto e mesma magnitude. A energia de interação entre dois dipolos pontuais será*

$$U = -\vec{E}' \cdot \vec{P} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta r} \left[ 3\vec{P}' \cdot \Delta\vec{r} \vec{P} \cdot \Delta\vec{r} - \Delta r^2 \vec{P} \cdot \vec{P}' \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta r^3} \left[ 3P_z^2 - P^2 \right],$$

onde usamos  $\vec{P} = -\vec{P}'$ . A configuração de equilíbrio corresponde ao mínimo de energia, mínimo  $P_z^2$ , dipolo paralelo ao plano. O valor do torque pode ser obtido notando que

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta r^3} P^2 \left[ 3\cos(\theta)^2 - 1 \right],$$

*Derivando a energia em relação à variável generalizada  $\theta$  se obtém a força generalizada, o torque. Há um detalhe importante: é preciso dividir por dois o resultado. A força generalizada corresponderia àquela relativa ao trabalho realizado quando a variável é incrementada. Esse incremento muda a orientação do dipolo real e do virtual ao mesmo tempo. O significado físico da força está no torque sobre o diolo real, não sobre o virtual. Daí, temos de dividir por 2.*

## 1.2 Polarização

Da mesma maneira que a um conjunto de cargas espalhadas em um volume se pode associar a noção de densidade de cargas, a carga em um volume pequeno  $\Delta V$  é dada por  $\Delta Q = \rho \Delta V$ , a um conjunto de dipolos espalhados em um volume se associa a noção de polarização:

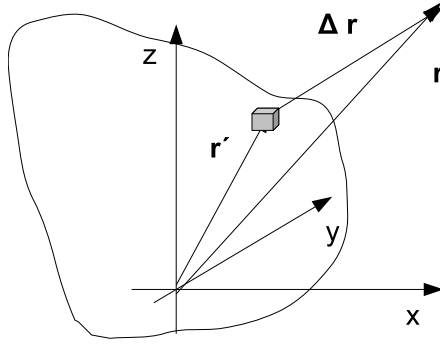


Figura 1.3: Integral.

$$\Delta \vec{P} = \vec{P} \Delta V.$$

O momento de dipolo total em uma região  $V$  será dado por

$$\vec{P}_V = \int_V d^3r \vec{P}$$

Vamos calcular o potencial criado por uma dada polarização de um meio. Generalizamos a expressão do potencial de um dipolo pontual para a integral, fig. 1.3:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta r^3}.$$

Essa expressão pode ser reescrita usando que  $\vec{\nabla} \frac{1}{\Delta r} = -\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r^3}$  como

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{\Delta r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[ d^3r' \vec{\nabla}' \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta r} - \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\Delta r} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} da \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{\Delta r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \frac{\rho_P(\vec{r}')}{\Delta r}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Aqui usamos o teorema da divergência para obter a interpretação, onde  $\vec{d}a = da \vec{n}$ :

$\sigma_P(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}$  = Densidade superficial de cargas de polarização localizada no bordo do volume  $V$

$\rho(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})$  = Densidade volumétrica de carga de polarização localizada no interior de  $V$ .

A manipulação acima foi meramente matemática. O volume  $V$  é arbitrário. Se integramos a contribuição da polarização sobre dois volumes  $V_1$  e  $V_2$  contíguos, a densidade superficial de cargas de polarização na fronteira entre os dois volumes se anulam, já que os vetores  $\vec{n}_i$ , oriundos de cada volume, serão opostos. Por outro lado se a polarização de fato termina abruptamente no bordo de  $V$ , então não haverá contribuição vinda do outro lado e a integral de superfície torna-se

mais essencial. Essa densidade superficial de cargas é real? De fato, como o campo pode ser obtido como uma contribuição de densidades superficiais e volumétricas de acordo com a lei de Coulomb, então temos de ver essas densidades como tendo significado físico. Como podem aparecer cargas, se elas são oriundas de dipolos pontuais que apresentam pares de cargas opostas? Bem, aplicando o teorema da divergência para a integral da densidade volumétrica de cargas de polarização se encontra que a carga total volumétrica é igual e de sinal contrário à carga total superficial,

$$\int da\sigma_P + \int dV\rho_P = 0.$$

Embora a expressão do campo escalar criado pela polarização a rigor somente possa ser utilizada fora do material, é possível generalizar e utilizar a mesma expressão para pontos no interior do material, desde que a polarização não apresente singularidades. A razão é que se pode separar as contribuições de dipolos fora de uma pequena esfera em torno do ponto onde se quer calcular o potencial. Para esses é seguro utilizar a expressão 1.2.5. Para a contribuição dos dipolos dentro da própria esfera se utiliza o resultado de que o campo elétrico médio é dado pelo momento de dipolo total da esfera, e tratamos essa pequena esfera como uniformemente polarizada. O gradiente da integral em 1.2.5 realizado na esfera pequena produz esse campo. O resultado é então que a expressão 1.2.5 integrada em todo o espaço.

Uma maneira elegante de descrever a situação é lembrar que a origem de tudo era cargas, que podem ser descritas formalmente como densidades de cargas. Uma carga pontual em  $\vec{r}_0$  é o bloco básico, sendo descrita como a densidade de cargas  $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ . A partir daí qualquer coleção de cargas é obtida somando sobre q's com seus  $r_0$ 's,  $\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha} q_{\alpha}\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha})$ . Uma densidade linear de cargas no eixo z é descrita por  $\rho(\vec{r}) = \int dz_0\lambda(z_0)\delta(z - z_0)\delta(x)\delta(y) = \lambda(z)\delta(x)\delta(y)$ , enquanto uma densidade superficial de cargas localizada no plano  $z = 0$  é descrita por  $\rho(\vec{r}) = \sigma(x, y)\delta(z)$ . Uma distribuição volumétrica de cargas, simplesmente beira a tautologia,  $\rho(\vec{r}) = \int d^3r'\rho(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ . Um dipolo pontual,  $\vec{P} \equiv \lim_{S \rightarrow 0} q\vec{S}$ , localizado em  $\vec{r}_0$ , pode ser descrito por uma densidade de cargas da forma:

$$\rho_{\vec{P}}(\vec{r}) = \lim_{S \rightarrow 0} q \left( \delta(\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{S}) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \right) = \vec{P} \cdot \vec{\nabla}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = -\vec{P} \cdot \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

onde  $\nabla_0$  atua em  $\vec{r}_0$  enquanto  $\nabla$  atua em  $\vec{r}$ .

**Exercício: utilize a densidade de cargas acima, na lei de Coulomb, para re-obter o campo de um dipolo pontual.** Conclusão: ou utilize diretamente o momento de dipolo usando diretamente o potencial de um dipolo ou empregue  $\rho_{\vec{P}}$  na lei de Coulomb.

Uma coleção de dipolos será descrita pela densidade de cargas

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\alpha} \vec{P}_{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}).$$

Uma distribuição contínua de dipolos, ou seja uma densidade de dipolos, pode ser descrita então por uma densidade de cargas escrita como a integral da densidade de cargas associada a um dipolo pontual

$$\rho(\vec{r}) = \int d^3r_0 \vec{P}(\vec{r}_0) \cdot \vec{\nabla}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0).$$

Aqui a polarização tem de ser definida com uma função em todo o espaço. Em pontos onde a polarização não sofre descontinuidades a integral é obtida diretamente da ação da derivada da

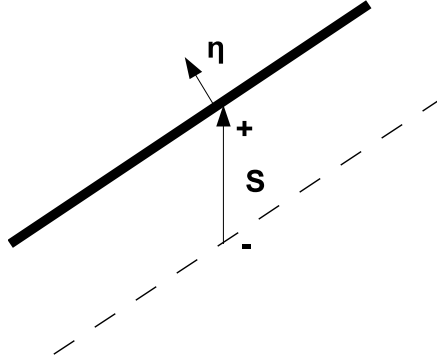


Figura 1.4: Cargas superficiais de polarização.

função delta, generalizada para delta tridimensional, por exemplo  $\partial_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \partial_1 \prod_{j=1..3} \delta(x_j - x_{0j}) = \partial_1 \delta(x_1 - x_{01}) \times \prod_{j=2..3} \delta(x_j - x_{0j})$ . O resultado é  $\rho(\vec{r}) = -\partial_i P_i(\vec{r})$ . Para obter a densidade de cargas onde há descontinuidades da polarização, considere que a polarização vá a zero quando a coordenada  $x_1$  ultrapassa  $x_{01}$ . O plano  $x_1 = x_{01}$  é o limite, a polarização é diferente de zero à esquerda e nula à direita do plano. A polarização pode ser descrita numa pequena região como  $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}_0 \theta(x_{01} - x_1)$  onde a função theta de Heaviside satisfaz a  $\theta(x) = 0(1)$  se  $x < 0(x > 0)$ . Nesse caso temos que  $\partial_1(\vec{P})_1 = -(\vec{P})_{01} \delta(x_1 - x_{01})$  e o resultado é que

$$\rho(\vec{r}) = \vec{P}_0 \cdot \hat{e}_1 \delta(x_1 - x_{01}).$$

Essa é exatamente a expressão da densidade de cargas, associada a uma distribuição superficial de cargas  $\sigma = \vec{P} \cdot \hat{n}$  localizada na superfície onde se encontra a descontinuidade, o plano  $x_1 = x_{01}$ . Quando a polarização vai abruptamente a zero no bordo de todo o volume V, haverá contribuições em todo o bordo do volume levando à equação 1.2.5

Interpretação geométrica das densidades de carga (*esboço*): Fig 1.4

Imagine uma distribuição contínua e uniforme de dipolos físicos todos com carga  $\pm q$  a distâncias  $\vec{S}$ ,  $\vec{P} = q\vec{S}$ . Todos os dipolos que estão a uma distância  $-\vec{S}$  da superfície contribuem com uma carga positiva para a superfície: tratamos as cargas que estão nessa faixa como cargas superficiais. Como haverá uma concentração  $|\vec{P}|$  de momento de dipolo, haverá um total de  $N = \frac{|\vec{P}|V}{|\vec{P}|} = \frac{|\vec{P}|A\hat{n} \cdot \vec{S}}{|\vec{P}|}$  dipolos. A carga na superfície será  $Q = q.N = \frac{q|\vec{P}|A\hat{n} \cdot \vec{S}}{|q\vec{S}|} = \sigma_P A$ .

### 1.3 O Deslocamento elétrico

Com origem em polarização ou sendo cargas externas inseridas em um material, chamadas cargas livres, toda carga dá origem ao campo elétrico.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_T) = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_l + \rho_P) = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_l - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}).$$

Daí dando um nome à combinação

$$\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$$

Obtemos que esse novo campo satisfaz à equação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l.$$

Porém

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = -\vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{P}},$$

que não necessariamente é nulo. É preciso tanto o rotacional como a divergência para que um campo vetorial esteja definido pelo teorema de Helmholtz. A condição de  $\vec{D}$  ser irrotacional falha flagrantemente em pontos onde haja uma descontinuidade da componente tangencial do campo ao atravessar uma superfície. Basta fazer a integral de linha do campo em circuito, dito Amperiano, em que uma linha esteja ao longo da superfície de um lado e volte do outro lado, com o percurso transversal que liga esses dois bem menor. Já que essa integral de linha resulta diferente de zero então o rotacional tem de ser diferente de zero, com componente paralela à superfície e ortogonal à Amperiana que tenha resultado não nula. **REPETINDO: a relação entre  $\vec{D}$  e  $\rho_l$  é parcialmente equivalente à entre  $\vec{E}$  e  $\rho_T$ , já que  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  sempre, em eletrostática.** Conhecer  $\vec{D}$  permite obter  $\rho_l$ , da mesma forma como conhecer  $\vec{E}$  permite obter  $\rho_T$ . Mas o inverso não é garantido. O conhecimento de  $\rho_T$  determina  $\vec{E}$ , mas o conhecimento de  $\rho_l$  não determina  $\vec{D}$ . É preciso mais, é preciso entender a dependência de  $\vec{\mathcal{P}}$  com  $\vec{E}$ . A mesma distribuição de cargas livres em situações com meios materiais distintos produz soluções distintas, tanto para  $\vec{D}$  como para  $\vec{E}$ , já que as cargas totais podem ser diferentes.

Ainda assim o conceito de campo de deslocamento elétrico,  $\vec{D}$ , é extremamente útil. Vale sempre a lei de Gauss

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_l(V) = \text{Carga livre no interior de } V$$

A lei de Gauss tem consequência para a continuidade da componente normal de  $\vec{D}$  em uma superfície

$$(\vec{D}^{II} - \vec{D}^I) \cdot \hat{n} = \sigma_l = \text{Densidade superficial de cargas livres},$$

enquanto para o campo elétrico continuamos tendo

$$\epsilon_0(\vec{E}^{II} - \vec{E}^I) \cdot \hat{n} = \sigma_t = \sigma_l + \sigma_P.$$

Já para a componente tangencial temos a continuidade do campo elétrico

$$(\vec{E}^{II} - \vec{E}^I) \times \hat{n} = 0 = \left( \frac{1}{\epsilon^{II}} \vec{D}^{II} - \frac{1}{\epsilon^I} \vec{D}^I \right) \times \hat{n},$$

que equivale à continuidade do potencial elétrico.

A relação entre  $\vec{\mathcal{P}}$  e  $\vec{E}$  é bem simples em uma grande quantidade de materiais, chamados dielétricos. Para esses materiais

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E},$$

em especial nos dielétricos lineares a constante  $\chi$ , chamada suscetibilidade elétrica, independe do módulo de  $\vec{E}$ , sendo característica do meio. Nos casos de campos eletromagnéticos dependentes do tempo encontra-se conceito análogo onde a constante pode depender da frequência com que o campo varia no tempo, mesmo no caso linear. Aqui vamos tratar do caso linear em que  $\chi$  pode

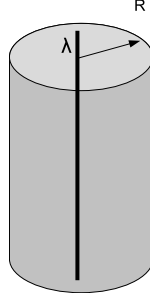


Figura 1.5: Cilindro dielétrico.

dependem, no entanto, da posição: dielétricos lineares não homogêneos. Sendo  $\vec{\mathcal{P}}$  proporcional a  $\vec{E}$  o campo  $\vec{D}$  também será

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

com  $\epsilon(\vec{r}) = \epsilon_0(1 + \chi(\vec{r}))$  chamada permissividade do meio. Mais um nome:  $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = K$ , constante dielétrica do meio.

A linearidade leva imediatamente a

$$\rho_l = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \epsilon.$$

Se em um ponto o dielétrico é homogêneo,  $\vec{\nabla} \epsilon = 0$ , teremos uma relação linear entre as cargas de polarização e livres

$$\rho_l = \epsilon \rho_T \quad \leftrightarrow \quad \rho_P = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_l.$$

Haverá cargas de polarização contrárias às cargas livres. Dizemos que a carga livre foi parcialmente blindada. Além das cargas volumétricas de polarização haverá cargas superficiais de polarização sempre que o dielétrico sofre mudança abrupta ao atravessar uma superfície onde o campo elétrico seja não nulo.

As relações de continuidade podem ser reescritas para o caso de dielétrico linear

$$\begin{aligned} (\vec{D}^{II} - \vec{D}^I) \cdot \hat{n} &= \sigma_l = (\epsilon^{II} \vec{E}^{II} - \epsilon^I \vec{E}^I) \cdot \hat{n} = -(\epsilon^{II} \partial_n \phi^{II} - \epsilon^I \partial_n \phi^I) \\ (\vec{E}^{II} - \vec{E}^I) \times \hat{n} &= 0 = \left( \frac{1}{\epsilon^{II}} \vec{D}^{II} - \frac{1}{\epsilon^I} \vec{D}^I \right) \times \hat{n} \quad \leftrightarrow \quad \phi^{II} - \phi^I = 0, \end{aligned}$$

## 1.4 Exemplos

**Exemplo: cilindro dielétrico com  $\epsilon = \epsilon(r)$ .**

Uma densidade linear de cargas é acrescida ao centro de um corpo que apresenta simetria,  $\epsilon = \epsilon(r)$ . Suponhamos que o raio seja R. Fig. 1.5

Devido à simetria podemos supor  $\vec{D} = D(r)\hat{r}$  e  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ . Daí, o teorema de Gauss nos dá  $D(r) = \frac{\lambda}{2\pi r}$  e  $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon(r)}$ . Conclui-se que

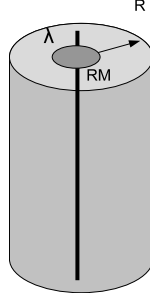


Figura 1.6: Cilindro duplo dielétrico.

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\lambda}{2\pi r} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \hat{r},$$

o que permite calcular as cargas de polarização

$$\rho_p(r) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{P}} = -\left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi r^2}\right) + \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi r^2} \cdot \vec{\nabla} \frac{\epsilon_0}{\epsilon}.$$

O último termo representa uma densidade volumétrica propriamente dita,

$$\rho_P(r) = \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi r^2} \cdot \vec{\nabla} \frac{\epsilon_0}{\epsilon},$$

mas o anterior,  $-(\vec{\nabla} \cdot \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi r^2})$  representa uma densidade linear na origem\*, que se sobrepõe à densidade linear de cargas livres blindando-a parcialmente.

$$\lambda_p = -\lambda \frac{\epsilon(0) - \epsilon_0}{\epsilon(0)}.$$

Se o cilindro termina em  $r = R$ , abruptamente, teremos uma densidade superficial induzida

$$\sigma_p = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi R} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(R)}\right).$$

É interessante perceber que o campo elétrico diminui de intensidade em função da presença do dielétrico. A permissividade sendo dependente da distância à carga livre leva a que o campo varia com a distância. É como se a carga efetiva dependesse da distância à origem. Um efeito análogo se encontra na descrição das partículas elementares em que a carga efetiva da partícula varia para processos em que a distância seja muito pequena, devido a efeitos de flutuação do vácuo quântico.

Seja então um problema aparentemente diferente: a permissividade elétrica é constante,  $\epsilon_1$ , de  $r = 0$  até  $r = R_M$  e então muda para outro valor,  $\epsilon_2$ . Fig. 1.6.

Ora, não é preciso fazer novas contas, esse problema deriva do anterior. Basta notar que  $\frac{\epsilon_0}{\epsilon}$  sofre uma descontinuidade em  $r = R_M$ , de maneira que

---

\*A expressão  $\vec{\nabla} \cdot \frac{\lambda \vec{r}}{2\pi r^2}$  é nula para  $r \neq 0$ . Usando a identidade  $\int da (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = \oint_{\partial a} \vec{A} \cdot \hat{n}$  se obtém que em  $r = 0$  há uma delta de Dirac bidimensional. Essa é a expressão matemática para a densidade linear na origem.

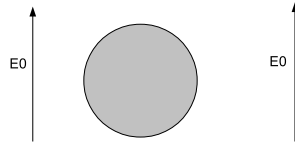


Figura 1.7: Esfera dielétrica em campo uniforme.

$$\partial_r \frac{\epsilon_0}{\epsilon} = \delta(r - R_M) \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right).$$

Esse termo pode ser interpretado como densidade superficial de cargas de polarização, devido à polarização ser diferente dos dois lados do dielétrico, já que  $D$  é o mesmo mas  $E$  muda.

Se em vez de uma linha de cargas na origem temos um cilindro com raio  $R_1 < R$ , carregado com carga  $Q$ , também não é preciso fazer novas contas. A solução é a mesma, para  $r > R_1$ . Aparece a mais, a densidade de cargas superficiais de polarização na superfície interior, que pode ser interpretada como a mesma densidade linear que obtivemos agora a pouco. Essa carga se "desloca da origem para a superfície interna", e deixa de ser linear propriamente dita para ser superficial.

$$\sigma_p = \vec{\mathcal{P}} \cdot (-\hat{r}) = \frac{-\lambda}{2\pi R_1} \left( 1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon(R_1)} \right).$$

**Exemplo: esfera dielétrica em um campo externo uniforme** Fig 1.7

Esse é outro dos problemas obrigatórios em um curso de eletromagnetismo. Em um campo elétrico uniforme,  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ , se introduz uma esfera dielétrica,  $\epsilon_1$  (uniforme). O objetivo é descrever o campo em todo o espaço e encontrar as cargas de polarização. Mãos à obra: o campo dentro da esfera será

$$\phi^I = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^l} P_l(\cos\theta) A_l.$$

Fora:

$$\phi^{II} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^{l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) B_l - E_0 r \cos\theta.$$

Continuidade do campo elétrico em  $r = R$ :

$$\phi^I = \phi^{II} \rightarrow A_l = B_l - E_0 \delta_{l,1}$$

Continuidade da componente normal de  $\vec{D}$  em  $r = R$ :

$$\epsilon_1 \partial_r \phi^I = \epsilon_0 \partial_r \phi^{II} \rightarrow \epsilon_1 l \frac{A_l}{R} = -\epsilon_0 (l+1) \frac{B_l}{R} - E_0 \epsilon_0 \delta_{l,1}$$

Solução: somente são diferentes de zero os coeficientes com  $l = 1$  e obtemos

$$A_1 = B_1 - E_0 = \frac{-3\epsilon_0 E_0}{\epsilon_1 + 2\epsilon_0}.$$

O campo dentro da esfera será dado por

$$\vec{E} = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon_1 + 2\epsilon_0} \vec{E}_0,$$

O campo fora será o campo uniforme aplicado mais um campo de dipolo pontual

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

A polarização dentro do dielétrico será uniforme

$$\vec{P} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + 2\epsilon_0} \hat{z} = \frac{3\epsilon_1\epsilon_0}{\epsilon_1 + 2\epsilon_0} \vec{E}_0$$

As cargas superficiais serão

$$\sigma_p = \epsilon_0 (E_r^{II} - E_r^I) = \frac{3\epsilon_0 E_0 \cos \theta}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1 + 2\epsilon_0}. \quad (1.4.6)$$

Daqui se podem tirar outras conclusões: Troquemos o ambiente externo, que era vácuo, por um outro dielétrico com  $\epsilon = \epsilon_2$  mantendo o mesmo valor de  $E_0$ , ou seja o mesmo campo elétrico aplicado a distância da esfera. Basta trocar em todo local  $\epsilon_0$  por  $\epsilon_2$ . Temos o efeito de uma esfera com permissividade diferente em um meio dielétrico. A única exceção é na expressão da carga de polarização, pois a primeira das equações em 1.2.5 continua sendo expressa em termos de  $\epsilon_0$  mesmo após a mudança. Resulta

$$\sigma_p = \epsilon_0 (E_r^{II} - E_r^I) = \frac{3\epsilon_0 E_0 \cos \theta}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}. \quad (1.4.7)$$

Em particular podemos fazer agora  $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_0$ . Se trata então de um buraco, no meio de um dielétrico, com  $\epsilon_2$ , que porta um campo elétrico aplicado em seu interior  $\vec{E}_0$ . Uma questão interessante: qual é o campo elétrico no interior do buraco? Fazendo as trocas de  $\epsilon$ s acima obtemos que o campo dentro do buraco é uniforme com

$$\vec{E} = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_0 + 2\epsilon_2} \vec{E}_0, \quad (1.4.8)$$

e a beirada do buraco apresenta densidade de cargas de polarização dada por

$$\sigma_p = \epsilon_0 (E_r^{II} - E_r^I) = 3E_0 \cos \theta \frac{\epsilon_0 - \epsilon_2}{\epsilon_0 + 2\epsilon_2}. \quad (1.4.9)$$

Vale a pena comparar com a expressão do campo dentro de um buraco de formato diferente. Imagine um buraco cilíndrico com eixo de simetria paralelo ao campo aplicado, na direção  $z$ . A solução exata desse problema me parece complicada. Mas dois limites são de fácil compreensão. Imagine que a altura do cilindro é bem maior que o raio, Fig.1.8. O campo elétrico deve apresentar continuidade na sua componente tangencial ao campo. Assim o campo no centro do cilindro deve se aproximar do campo longe do cilindro

$$\vec{E}_{\text{centro-cil. comprido}} = \vec{E}_0. \quad (1.4.10)$$

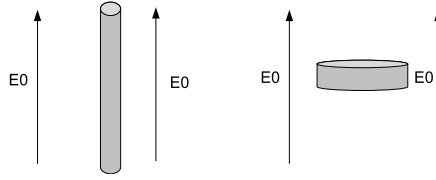


Figura 1.8: Cilindros fino e chato.

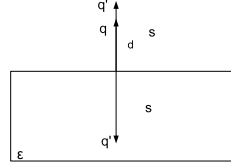


Figura 1.9: Carga acima de semi-espço dielétrico.

Por outro lado para um cilindro no limite oposto, raio muito pequeno comparado à altura, o campo no interior é determinado por outro argumento. Fig. 1.8. A continuidade da componente normal de  $\vec{D}$  é o fator relevante. Assim o campo  $\vec{D}$  no meio do buraco deve ser igual ao campo  $\vec{D}$  longe do buraco. Assim

$$\vec{E}_{\text{centro-cil. achatado}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} \vec{E}_0. \quad (1.4.11)$$

Comparando os casos vemos que o campo do buraco esférico, 1.4.8, é intermediário entre o do buraco cilíndrico comprido (buraco agulha), 1.4.10, e o do cilíndrico achatado, 1.4.11. Um resultado correlacionado a esse e que mostra a dependência com a geometria do buraco pode ser visto em, Am. J. Phys. 71, Abril 2003. Lá se discute o campo criado, não por um buraco, mas por pelo problema gêmeo de um corpo uniformemente polarizado inserido em meio dielétrico. Se toma a geometria na forma de um elipsoide de revolução. Se discute então o limite quando as dimensões do corpo se colapsam, se aproximando de um ponto, formando um dipolo pontual. O campo resultante guarda memória do formato. O interessante é que se pode discutir os limites infinitamente oblato ou infinitamente prolato ou esférico. Esse resultado interpola, de certa maneira, os apresentados acima.

**Exemplo: carga pontual acima de um semi-espço dielétrico homogêneo** Fig. 1.9

Uma carga pontual,  $q$ , é posta no ponto  $d\hat{z}$ . O espaço com  $z > 0$  é o vácuo. Para  $z < 0$  se encontra um dielétrico com permissividade homogênea. O plano  $z = 0$  separa o espaço em dois semi-espços homogêneos. Esse problema pode ser resolvido pelo métodos das imagens. A ideia é que as cargas de polarização produzem campos elétricos que podem ser descritos em cada um dos semi-espços por cargas imagens colocadas no outro semi-espço. Pela lei de Coulomb o campo criado por essas cargas de polarização devem ser simétricos sob a troca  $z \rightarrow -z$ : o campo elétrico inverte a componente vertical e o potencial elétrico é invariante. Essa ideia sugere um palpite: por cargas imagens iguais,  $-q'$  em pontos opostos  $\pm s\hat{z}$ . Ficamos então, usando coordenadas cilíndricas, e chamando a região I a que tem  $z$  positivo e região II a oposta:

$$\begin{aligned}\phi^I &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{(z-d)^2 + r^2}} - \frac{q'}{\sqrt{(z+s)^2 + r^2}} \right] \\ \phi^{II} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{(z-d)^2 + r^2}} - \frac{q'}{\sqrt{(z-s)^2 + r^2}} \right].\end{aligned}\quad (1.4.12)$$

Por construção, o palpite foi bom, garantimos a continuidade do potencial elétrico ao atravessar a superfície  $z = 0$ . Quanto à continuidade de  $D_z = \epsilon \partial_z \phi$  resulta

$$\epsilon_0 \left[ \frac{-dq}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{sq'}{(s^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \epsilon \left[ \frac{-dq}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{sq'}{(s^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

ou

$$(\epsilon - \epsilon_0) \frac{dq}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = (\epsilon + \epsilon_0) \frac{sq'}{(r^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

E portanto  $q' = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} q$  enquanto  $s = d$ .

A densidade de cargas de polarização superficiais se obtém de da descontinuidade da componente  $z$  do campo elétrico, resultando em

$$\sigma_p = -2\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

O campo na região superior é obtido da carga real mais a carga imagem na região inferior. O campo na região inferior é obtido como sendo devido a uma única carga na posição da carga real, que é parcialmente blindada.

## 1.5 Energia eletrostática

Vimos que no vácuo o trabalho feito contra as forças eletrostáticas para juntar cargas, a energia de configuração das cargas, pode ser escrita como

$$U_T = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \int d^3x \rho \phi. \quad (1.5.13)$$

A passagem da penúltima para a última forma envolve integrar por partes usando a expressão dos campos como gradiente do potencial, como já fizemos anteriormente.

Este resultado pode ser estabelecido considerando que, se uma distribuição de cargas  $\rho(\vec{r})$  cria um campo  $\phi(\vec{r})$ , então uma densidade de cargas  $\alpha\rho(\vec{r})$  cria um campo  $\alpha\phi(\vec{r})$ . Assim o incremento de energia ao levar  $\alpha \rightarrow \alpha + \Delta\alpha$  será correspondente a acrescentar cargas da forma  $\Delta\rho(\vec{r}) = (\Delta\alpha)\rho(\vec{r})$  resultando

$$\Delta U_T = \int d^3x \Delta\alpha \rho \phi.$$

O resultado 1.5.13 é obtido integrando todas as variações desde  $\alpha = 0$  (correspondente a ausência de cargas em todo o espaço) até  $\alpha = 1$  (correspondente à configuração desejada). Este resultado é

válido inclusive na presença de meios dielétricos lineares. Afinal a relação entre potencial e campo elétrico é a mesma. Por isso acrescentamos o subscrito  $T$ , para ressaltar que se trata de cargas totais incluindo as de polarização.

Mas um outro ponto de vista é possível. Consideramos a carga livre como sendo  $\alpha\rho_l(\vec{r})$  e calculamos o trabalho de criar toda a carga livre variando  $\alpha$  desde zero até um, como antes. Como o campo é proporcional à carga livre em um meio linear se obtém que

$$U_L = \frac{1}{2} \int d^3x \rho_l \phi = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \phi = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (1.5.14)$$

E agora, qual a interpretação, qual é a diferença entre essas expressões, parecidas mas distintas? O resultado em 1.5.13 expressa a energia eletrostática total, a energia verdadeira, acumulada na forma de campo elétrico. Considero em certa medida como uma grandeza mais fundamental do que a expressa com 1.5.14. Porém a energia  $U_L$  é provavelmente mais útil. Ao carregar um capacitor com meio dielétrico, o trabalho realizado pelo circuito será o considerado em 1.5.14 e não o realizado em 1.5.13. O circuito fornece cargas livres para o capacitor. O trabalho a ser considerado é somente o expresso em 1.5.14. A razão é que o trabalho microscópico para criar as cargas de polarização não deve ser computado aqui, mas sim no cálculo da energia total. A energia  $U_L$  é a energia acessível ao sistema, não a energia eletrostática total.

$U_T$  = Energia eletrostática total da configuração de todas as cargas.

$U_L$  = Energia devido ao trabalho em trazer as cargas livres-Energia ‘acessível’.

Uma aplicação imediata é para o cálculo da energia em capacitores. Carregar um capacitor com a duas placas externas com cargas opostas custa trabalho. Trata-se claramente da  $U_L$ . Uma placa do capacitor, com densidade superficial  $\sigma_+$ , é carregada com carga  $Q_L = Q$  e está em um potencial  $\phi_+$  enquanto a outra, com  $\sigma_-$ , é carregada com  $Q_L = -Q$  e o potencial será  $\phi_-$ . A energia será

$$\begin{aligned} U_L &\equiv \frac{1}{2} \int dV \rho_l \phi = \frac{1}{2} \left( \int_{S_+} \sigma_+ \phi_+ + \int_{S_-} \sigma_- \phi_- \right) \\ &= \frac{1}{2} Q \Delta\phi = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta\phi)^2, \end{aligned}$$

onde usamos que para um capacitor com dielétricos lineares  $Q = C\Delta\phi = C(\phi_+ - \phi_-)$ .

Uma discussão interessante é esclarecer a dependência da energia com as propriedades do dielétrico. A dependência está na constante  $C$  que depende da configuração das placas condutoras e do meio em que elas se encontram. Caso os valores da permissividade  $\epsilon(\vec{r})$  mudem, a energia será alterada. Não importa como seja a mudança, a energia poderá mudar, é um fato da vida.

Discutimos anteriormente a capacitância de duas placas cilíndricas concêntricas, raios  $R_1 < R_2$ . Duas configurações são particularmente interessantes.

**Situação 1-cascas dielétricas concêntricas** Fig. 1.10 Sem alterar a simetria cilíndrica podemos considerar  $\epsilon = \epsilon_1$ , para  $R_1 < r < R$  e  $\epsilon = \epsilon_2$ , para  $R < r < R_2$ . Comprimento  $L \gg R$ , carga  $Q$  na placa interior, resulta, supondo  $D = D(r)$ , que  $D(r) = \frac{Q}{L2\pi r}$ ,  $R_1 < r < R_2$ . Daí

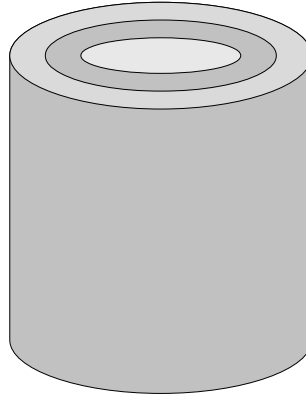


Figura 1.10: Cilindros concêntricos.

$\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon L 2\pi r}$ , com  $\epsilon$  mudando com  $r$  conforme acima descrito. Nesse caso

$$\Delta\phi = \int_{R_1}^R E dr + \int_R^{R_2} E dr = \frac{Q}{2\pi L} \ln \left( R^{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2}} R_1^{\frac{1}{\epsilon_2}} R_2^{\frac{1}{\epsilon_1}} \right),$$

A energia será

$$U_l = \frac{Q^2}{4\pi L} \ln \left( R^{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2}} R_1^{\frac{1}{\epsilon_2}} R_2^{\frac{1}{\epsilon_1}} \right).$$

Se alteramos a configuração, mudando o valor de  $R$ , muda a energia. Derivando a energia em relação a  $R$ , mantendo  $Q$  fixo, obtemos uma força generalizada, que está relacionada com a força que atua na interface entre os dois meios dielétricos. Que exista tal força pode ser percebida notando que na interface há cargas de polarização que estão sujeitas à ação do campo elétrico, há uma espécie de pressão radial.

**Situação 2-Cascas dielétricas sobrepostas** Agora quebramos a simetria cilíndrica. Há uma constante dielétrica até uma altura do cilindro igual a  $z_0$ ,  $\epsilon_1$ , e outra pra  $z_0 < z < L$ ,  $\epsilon_2$ . Já vimos essa situação antes, o campo elétrico é  $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \hat{r}$  em toda a região entre os cilindros. Os campos  $\vec{D}$ , valem  $\vec{D}_1 = \vec{E} = \frac{\epsilon_1 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \hat{r}$  e  $\vec{D}_2 = \vec{E} = \frac{\epsilon_2 \lambda}{2\pi\epsilon_0} \hat{r}$ , a carga livre em cada parte do cilindro é  $Q_i = \lambda_i L = \lambda \frac{\epsilon_i}{\epsilon_0}$ , de forma que a carga livre total é  $Q = \lambda \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} (L - z_0) + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} (z_0) \right)$ . A diferença de potencial será

$$\Delta\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} (\epsilon_1 z_0 + \epsilon_2 (L - z_0))^{-1},$$

e a energia acumulada será

$$U_L = \frac{Q^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} (\epsilon_1 z_0 + \epsilon_2 (L - z_0))^{-1}.$$

Novamente a energia depende da altura. Variando a altura,  $z_0$  varia a energia de forma que temos uma força generalizada

$$F_z = -\frac{\partial U_L}{\partial z} /_{Q-\text{FIXO}} = \frac{Q^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} (\epsilon_1 z_0 + \epsilon_2 (L - z_0))^{-2} (\epsilon_1 - \epsilon_2).$$

Observação: é preciso calcular a derivada em relação a  $z$  mantendo as cargas fixas. Pelo princípio de D'Alembert a variação de energia num deslocamento virtual é a soma dos trabalhos de todas as forças generalizadas multiplicadas pelas variações das coordenadas generalizadas. Derivar a expressão da energia com o potencial fixo, um erro muito comum, corresponderia a incluir as cargas como coordenadas generalizadas. Ter-se-ia de incluir os trabalhos dessas forças (trabalho para carregar o sistema de maneira a manter o potencial fixo enquanto varia-se a altura). Descontado esse trabalho, obtém-se o mesmo resultado acima.

Essa é a força "que um dielétrico exerce no outro". O curioso é que a solução apresentada não permite visualizar a origem dessa força. Na realidade a força tem origem nas distorções das linhas de campo no extremos do cilindro, que exercem força diferentes em cada um dos dielétricos.

### 1.5.1 Um modelo mecânico para visualizar os conceitos de energia

Fig. 1.11

Energia é um aspecto tão relevante que talvez valha a pena investir algum tempo para esclarecer melhor a diferença entre  $U_T$  e  $U_L$ . Vou apresentar um modelo mecânico tentando esclarecer a diferença entre energia total,  $U_T$  e energia acessível,  $U_L$ . Para tal vamos imaginar uma geringonça composta por duas placas não condutoras carregadas, vou chamar de planos de polarização, cada uma carregada com densidade superficial fixa  $\pm\sigma_p$ , e postas paralelas entre si, uma colada na outra. As cargas estão presas aos planos rígidos que estão separados por um isolante ideal muito fino, a distância inicial entre as cargas é considerada nula para todos os efeitos. Independente da distância entre elas, desde que pequena comparada as dimensões lineares da placa, a força de atração que uma placa exerce na outra será  $F_0 = A\sigma_p E_p = \frac{A}{2\epsilon_0}\sigma_p^2$ , onde  $E_p = \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0}$  é o módulo do campo criado por um plano no outro. Agora imagine que a geringonça conta com um sistema de molas capaz de exercer forças opostas à força de atração entre essas cargas. Consegue imaginar? Ajustando a distensão da mola efetiva para que, com separação zero entre os planos, a distensão inicial da mola  $x_M$  satisfaça a  $kx_M = F_0$ , os planos estarão em equilíbrio, a força exercida pelas molas equilibra a elétrica. Não parece tão complicado, não é mesmo? Mas agora imagine mais coisas. Imagine que essa geringonça seja inserida entre duas placas retas de um capacitor de mesmas dimensões. Colocamos o plano de polarização com  $-\sigma_p$  (negativo) para cima e o com  $\sigma_p$  para baixo. Ajustamos para que o arranjo seja simétrico em relação à variável  $z$ . A placa externa superior está em  $z = h$ , o conjunto de placas de polarização com  $\mp\sigma_p$  estará em  $z = 0^\pm$ , e a placa externa inferior em  $z = -h$ . Agora começamos a carregar o capacitor com cargas positivas na placa superior e negativas na placa inferior, ao contrário das  $\sigma_p$ s. Cada placa externa recebe densidade superficial de cargas,  $\pm\sigma_l$ , criando um campo elétrico para baixo dado por  $E_l = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0}$ . Esse campo elétrico tende a afastar as placas de polarização, criando um intervalo entre elas. Quanto vale esse intervalo,  $\Delta x$ ? A placa superior de polarização sofre uma força para cima dada por

$$F_z = -F_0 + E_l\sigma_p + k(x_M - \Delta x) = A\sigma_p \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} - K\Delta x.$$

Portanto  $F_z = 0 \rightarrow k\Delta x = A\frac{\sigma_l\sigma_p}{\epsilon_0}$ .

O campo elétrico aponta para baixo e a componente  $E_z$  apresenta simetria em torno de  $z = 0$ . Vale  $E_z = -(\sigma_l - \sigma_p)/\epsilon_0$  para  $-\frac{\Delta x}{2} < z < \frac{\Delta x}{2}$  e vale  $E_z = -\frac{\sigma_l}{\epsilon_0}$  para  $\frac{\Delta x}{2} < |z| < h$ . O potencial elétrico será  $\phi(z) = \frac{\sigma_l - \sigma_p}{\epsilon_0}z$  para  $0 < z < \frac{\Delta x}{2}$  e  $\phi(z) = \frac{\sigma_l z}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p \Delta x}{2\epsilon_0}$ , para  $\Delta x/2 < z < h$ , sendo uma função antissimétrica com respeito à variável  $z$ .

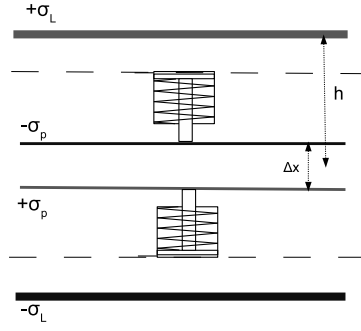


Figura 1.11: Planos carregados ligados por mola.

Agora podemos calcular as energias. A energia associada ao trabalho em carregar as placas é dada pela energia das cargas livres.

$$U_l \equiv \frac{1}{2} \int dV \rho_l \phi = 2 \times \frac{1}{2} \times A \sigma_l \phi(h) = \frac{A}{\epsilon_0} \sigma_l (\sigma_l h - \sigma_p \Delta x / 2)$$

A energia total, associada a todas as cargas é

$$U_T \equiv \frac{1}{2} \int dV \rho_T \phi = U_l + 2 \times \frac{1}{2} \times A (-\sigma_p) \phi(\Delta x / 2) = U_l - \frac{A}{\epsilon_0} \sigma_p (\sigma_l - \sigma_p) \frac{\Delta x}{2} = \frac{A}{\epsilon_0} \left[ \sigma_l^2 h - \sigma_l \sigma_p \Delta x + \sigma_p^2 \frac{\Delta x}{2} \right].$$

Bem, já que chegamos tão longe vamos calcular a integral da densidade de energia eletrostática

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \vec{E}^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \times 2 \times \left[ \left( \frac{\sigma_l - \sigma_p}{\epsilon_0} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} \right)^2 \left( h - \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = \frac{A}{\epsilon_0} \left[ \sigma_l^2 h - \sigma_l \sigma_p \Delta x + \sigma_p^2 \frac{\Delta x}{2} \right].$$

Ou seja, essa integral dá a exatamente  $U_T$ .

E quanto à diferença,  $U_l - U_T = \frac{A}{2\epsilon_0} \sigma_p (\sigma_l - \sigma_p) \Delta x$ , onde está? Que tal calcular a energia da mola?

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} K (x_M - \Delta x)^2 - \frac{1}{2} k x_M^2 = ??.$$

Bem, utilizando os valores já calculados para  $kx_m$  e  $k\Delta x$  obtemos, o que mesmo? Faça o cálculo e compare.

Considerando  $|\vec{D}| = \sigma_l$ , para  $-h < z < h$ , podemos confirmar que

$$U_l = \frac{1}{2} \int dV \vec{D} \cdot \vec{E}.$$

Bem, a interpretação deve ter ficado clara: a energia calculada com  $\int \vec{D} \cdot \vec{E}$  inclui a energia armazenada em outras formas, associadas à separação das cargas, enquanto a energia calculada com  $\epsilon_0 \int \vec{E}^2$  inclui somente a energia eletrostática propriamente dita. Num material dielétrico não temos as molas deste modelo, mas há energia armazenada nas moléculas que se polarizam.